Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik II

Herbstsemester 2019

Vorlesung 4

Prof. Dr. Katia Saporiti

Übersicht

I. Die stoische Dialektik: Aussagenlogik der Antike
   – Die fünf unbeweisbaren Syllogismen
   – Vier weitere Schlussregeln

II. Frege: Begriffe als Funktionen
   – Funktionen als ungesättigte Bestandteile von Gedanken
   – Begriffsschriftliche Notation aussagen- und prädikatenlogischer Strukturen

Die Dialektik der Stoa: Aussagenlogik in der Antike

- Zenon von Kition (ca. 335-263 v.Chr.), Kleanthes (ca. 331-232 v. Chr.), **Chrysippos** von Soloi (ca. 280-207 v. Chr.); kaum erhaltene Fragmente; Hauptquellen: Diaogenes Laertios (3 Jh.) & Sextus Empiricus (2. Jh.); Literatur: Jan Lukasiewicz, «Zur Geschichte der Aussagenlogik», *Erkenntnis* Vol. 5 (1935), S. 111-131
- Die Aristotelische Logik ist eine Namens- oder Begriffslogik, während die Dialektik der Stoa eine Aussagenlogik ist: «Der Unterschied zwischen den beiden besteht darin, dass in der Aussagenlogik ausser logischen Konstanten nur Aussagenvariable auftreten, während in der Namenlogik Namenvariable vorkommen.» (a.a.O. 111)
- Der *stoische Identitätssatz*: «Wenn das Erste, so das Erste.» «Wenn p, so p.»
  - «Wenn ...so» ist eine logische Konstante und «das Erste», bzw. «p» ist eine Aussagenvariable, für die nur eine Aussage (ein Aussagesatz) sinnvoll eingesetzt werden kann.
    - Wenn es Tag ist, so ist es Tag.
- Der *peripatetische Identitätssatz*: «A kommt allen A zu.» «Jedes A ist A.» «Alle A sind A.»
  - «... kommt allen ...zu», «jedes ... ist ...», «alle ... sind ...» ist eine logische Konstante und «A» ist eine Variable, für die nur ein Gemeinname (ein Begriff, ein genereller Term) sinnvoll eingesetzt werden kann.
    - Mensch kommt allen Menschen zu. Alle Menschen sind Menschen.

Die unbeweisbaren Syllogismen der stoischen Aussagenlogik

- Die stoische Logik kennt fünf axiomatische Schlussformeln, die sgn. *unbeweisbaren Syllogismen* und vier Schlussregeln (*themata*), die beliebig oft angewendet werden dürfen.
- Ein Schluss ist genau dann ein Syllogismus, wenn er ein unbeweisbarer Syllogismus ist oder mit Hilfe der Schlussregeln auf einen unbeweisbaren Syllogismus zurückgeführt werden kann.
- Alle unbeweisbaren Syllogismen enthalten eine (aussagenlogisch) komplexe Aussage als erste Prämisse, eine (aussagenlogisch) einfache Aussage als zweite Prämisse und eine weitere (aussagenlogisch) einfache Aussage als Konklusion.

i. Der erste unbeweisbare Syllogismus ist ein Schluss von einem Konditional und seinem Antecedens auf sein Konsequens.
   - Wenn das Erste, so das Zweite; nun aber das Erste; also das Zweite. (*modus*)
     - Wenn es Tag ist, ist es hell; nun ist es aber Tag; also ist es hell.

ii. Der zweite unbeweisbare Syllogismus ist ein Schluss von einem Konditional und der Negation des Konsequens auf die Negation des Antecedens.
   - Wenn das Erste, so das Zweite; nun aber nicht das Zweite; also nicht das Erste. (*modus*)
     - Wenn es Tag ist, ist es hell; nun ist es aber nicht hell; also ist es nicht Tag.

Die unbeweisbaren Syllogismen der stoischen Aussagenlogik

iii. Der dritte unbeweisbare Syllogismus ist ein Schluss von einer negierten Konjunktion und einem der Konjunktionsglieder auf die Negation des anderen Konjunktionsglieds.

- Nicht zugleich das Erste und das Zweite; nun aber das Erste; also nicht das Zweite. (*modus*)
  - Es ist nicht zugleich Tag und Nacht; nun ist es aber Tag; also ist es nicht Nacht.

iv. Der vierte unbeweisbare Syllogismus ist ein Schluss von einer Disjunktion und einem der Disjunktionsglieder auf die Negation des anderen Disjunktionsglieds.

- Entweder das Erste oder das Zweite; nun aber das Erste; also nicht das Zweite. (*modus*)
  - Entweder ist es hell oder es ist dunkel; nun ist es aber hell; also ist es nicht dunkel.

v. Der fünfte unbeweisbare Syllogismus ist ein Schluss von einer Disjunktion und der Negation eines Disjunktionsglieds auf das andere Disjunktionsglied.

- Entweder das Erste oder das Zweite; nun aber nicht das Zweite; also das Erste. (*modus*)
  - Entweder ist es Herbst oder es ist Frühling; nun ist es aber nicht Frühling; also ist es Herbst.

«Aus dem vierten Syllogismus ersieht man, dass die Disjunktion als ausschliessende ‘Entweder-oder-Verknüpfung’ aufgefasst wird. Für die nicht ausschliessende Alternative ist dieser Syllogismus nicht gültig.» (a.a.O. 117)

Die vier Schlussregeln (*themata*) für die Zurückführung abgeleiteter Syllogismen

1. Wenn aus zweien ein Drittes folgt, dann folgt aus jedem der beiden und der Negation der Konklusion die Negation des anderen.
2. Wenn aus zweien ein Drittes folgt und aus dem Dritten und einem oder beiden ein anderes, dann folgt das andere aus den zweien. (mögliche Rekonstruktion)
3. Wenn aus zweien ein Drittes folgt und aus diesem mit einem (hinzugenommenen) anderen ein Weiteres, dann folgt dieses Weitere aus den zweien und dem Hinzugenommenen.
4. Wenn aus zweien ein Drittes folgt und aus dem Dritten und einem der zwei oder beiden und einem oder mehreren (hinzugenommenen) anderen ein Weiteres folgt, dann folgt dieses Weitere aus den zweien und dem oder den Hinzugenommenen. (mögliche Rekonstruktion)

Alle aussagenlogisch gültigen Schlussformeln, so wird angenommen, lassen sich (sofern sie selbst keine unbeweisbaren Syllogismen sind) mit Hilfe dieser Schlussregeln auf die unbeweisbaren Syllogismen zurückführen. Für einige wird dies vorgeführt.

«Die Zurückführung abgeleiteter Schlussformeln auf die unbeweisbaren ist ein Musterstück logischen Scharfsinns. Darüber berichtet Sextus, der die dialektische Technologie der Stoiker gründlich versteht und zu den besten Quellen der stoischen Logik gerechnet werden muss.» (a.a.O. 117)

«Der Formalismus, oder besser gesagt, die *Formalisation*, bedeutet die ideale Exaktheit, die jedes deduktive System zu erreichen strebt. Wir sagen nämlich, dass ein deduktives, axiomatisch aufgebautes System *formalisiert* ist, wenn die Richtigkeit der Ableitungen im System nachgeprüft werden kann, ohne dass man auf die *Bedeutungen* der in den Ableitungen benützten Ausdrücke und Symbole zurückzugehen braucht, sofern man nur die Schlussregeln versteht.» (a.a.O. 119)

«Wir wissen auch, dass der Aussagenlogik eine bei weitem grössere Bedeutung zukommt, als jenem dürftigen Fragment der Namenlogik, das in der Syllogistik des Aristoteles verkörpert ist. Die Aussagenlogik ist das Fundament aller logischen und mathematischen Systeme. Wir müssen den Stoikern dankbar sein, dass sie die Grundlagen zu dieser herrlichen Theorie gelegt haben.» (a.a.O. 121)

«Die stoische Aussagenlogik lebt im Mittelalter insbesondere in der Lehre von den 'Konsequenzen' fort. Unter einer *Konsequenz* verstehen die mittelalterlichen Logiker sowohl eine Implikation, als auch eine Schlussformel vom Typus '*p*, also *q*', wobei '*p*' und '*q*' Aussagen sind.» (a.a.O. 122)

«Die 'philosophische' Logik der Neuzeit ist von der Psychologie und Erkenntnistheorie durch und durch verseucht. Für formallogische Fragen hat sie kein Verständnis noch Interesse. [...], von der Aussagenlogik findet man kaum eine Spur. [...] Ihre Wiedergeburt erfährt die neuzeitliche Logik aus dem Geiste der Mathematik. [...] Damit kommt auch die Aussagenlogik wieder zu ihrem Recht. Und da begegnen wir auf einmal einem in der Geschichte der Logik einzigartigen Phänomen: Ganz unvermittelt, ohne dass es möglich wäre, eine historische Erklärung anzugeben, entspringt die moderne Aussagenlogik in einer beinahe höchsten Vollkommenheit dem genialen Kopfe Gottlob Freges, dieses grössten Logikers unserer Zeiten. Im Jahre 1879 gibt Frege eine kleine, aber inhaltlich schwerwiegende Abhandlung heraus unter dem Titel: 'Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens'. In dieser Abhandlung ist die ganze Aussagenlogik zum ersten mal in streng axiomatischer Form als deduktives System aufgestellt. Das Fregesche System der Aussagenlogik ist auf zwei Grundbegriffen aufgebaut, auf der Negation und der Implikation. Die Implikation wird als Wahrheitsfunktion in ganz derselben Weise definiert, wie es vor mehr als 2000 Jahren Philon getan hat.» (a.a.O. 125)

Gottlob Frege (1848-1925) – Am Beginn der modernen Logik

- „Logic is an old subject, and since 1879 it has been a great one.“ (W.V.O. Quine, *Methods of Logic*, 1950)
- Gottlob Frege entwickelt eine „Formelsprache des reinen Denkens“ (die sog. Begriffsschrift), die es ermöglichen soll, logische Zusammenhänge sichtbar zu machen.
  - *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1879
  - *Function und Begriff*, Vortrag 1891
  - *Grundgesetze der Arithmetik*, 1893/1903
- *Logizismus*: Frege will die Gesetze der Arithmetik auf logische Gesetze zurückführen.
- Wichtig für die Entwicklung der modernen Logik sind neben der Formelsprache insb. die Auffassung von Begriffen als (eine besondere Art von) Funktionen, der Begriff der Wahrheitsfunktion und die wahrheitsfunktionale Definition logischer Junktoren und Operatoren.

Gottlob Frege: Am Beginn der modernen Logik

„Es ist einer der bedeutendsten Unterschiede meiner Auffassungsweise von der booleschen und ich kann wohl hinzufügen von der aristotelischen dass ich nicht von den Begriffen, sondern von den Urtheilen ausgehe. Damit ist aber keineswegs gesagt, dass ich das Verhältnis der Unterordnung von Begriffen nicht auszudrücken wüsste.“ (G. Frege, *Über den Zweck der Begriffsschrift*, S. 5)

„Es zeigt sich demnach, dass meine Begriffsschrift auch in der Beschränkung auf reine Logik ein etwas weiteres Gebiet beherrscht als Booles Formelsprache. Dies kommt daher, dass ich mich von der aristotelischen Logik weiter entfernt habe. Bei Aristoteles nämlich wie bei Boole ist das Bilden der Begriffe durch Abstraction die logische Urtätigkeit, und das Urteilen und Schliessen kommt durch ein unmittelbares oder mittelbares Vergleichen der Begriffe ihrem Umfange nach zu Stande.“ (G. Frege, *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift*, Nachgelassene Schriften S. 16)

„In der Logik zählt man nach Aristoteles eine ganze Reihe von Schlussarten auf; ich bediene mich nur dieser einen…“ [die Rede ist vom *modus ponens*] (G. Frege, *Begriffsschrift*, § 6)

Frege wird oft als Begründer der modernen Logik bezeichnet. Allerdings entwickelt Frege keinen logischen Kalkül (wie z.B. einen axiomatischen Kalkül, den Kalkül des natürlichen Schliessens oder den Beth-Kalkül), zu dem auch auch Beweise seiner Vollständigkeit und Korrektheit gehören. Er formalisiert also die Begriffe des Beweises und der Ableitung noch nicht ganz im Sinne später entwickelter logischer Kalküle.

Von Subjekt & Prädikat zu Funktion & Argument

- Wahrheit kommt nach Frege Gedanken zu. Ein Gedanke ist der Sinn eines Satzes.
- Die Logik ist mit den Gesetzen des Wahrseins befasst (nicht mit den Gesetzen des Denkens).
- Frege unterscheidet zwischen dem Fassen eines Gedankens, dem Urteilen und dem Behaupten.
- Ein Gedanke ist wahr unabhängig davon, ob er gefasst und seine Wahrheit behauptet wird.
- Die Rede von Prädikaten (und Subjekten) ist laut Frege in der Logik irrführend.

  „[D]ie Logik [hat] sich bisher immer noch zu eng an Sprache und Grammatik angeschlossen... Insbesondere glaube ich, dass die Ersetzung der Begriffe *Subject* und *Praedicat* durch *Argument* und *Function* sich auf die Dauer bewähren wird.“ (Frege, *Begriffsschrift*, VII)

  (1) Bei Plataeae siegten die Griechen über die Perser

  (2) Bei Plataeae wurden die Perser von den Griechen besiegt
- Obwohl die Sätze (1) und (2) unterschiedliche Subjekte und Prädikate haben, sind sie logisch äquivalent; d.h. sie lassen dieselben logischen Schlüsse zu.
- Beurteilbare Inhalte zerfallen nach Frege nicht in Subjekt und Prädikat, sondern in Funktion und Argument.

Funktionen & Wahrheitswerte

(1) Wasserstoffgas ist leichter als Kohlensäuregas.
(2) Sauerstoffgas ist leichter als Kohlensäuregas.
(3) Stickstoffgas ist leichter als Kohlensäuregas.

- Der gleichbleibende Bestandteil der mit (1) bis (3) ausgedrückten Gedanken („... ist leichter als Kohlesäuregas“) ist eine Funktion, der sich ändernde Teil das Argument.
- Der Ausdrücke „$2 \cdot x^3 + x$“ und „$2 \cdot (\ )^3 + (\ )$“ bezeichnen eine mathematische Funktion, die für das Argument 1 den Wert 3 und für das Argument 2 den Wert 18 ergibt.
- Funktionsausdrücke sind Ausdrücke, in denen ein Variable oder eine Leerstelle vorkommt.
- Funktionen sind *unvollständig*, *ungesättigt* oder *ergänzungsbedürftig*. Sie werden durch *Argumente* ergänzt und gesättigt. Das Resultat dieser Ergänzung oder Sättigung ist ein *Wert*.
- Lässt man die Zeichen „=“, „>“ und „<“ als Zeichen für die Bildung von Funktionsausdrücken zu, so ist „2+( )=5“ ein Funktionsausdruck und bezeichnet eine Funktion, die als Wert entweder das Wahre oder das Falsche liefert.

2 + **1** = 5 (ist falsch)
2 + **2** = 5 (ist falsch)
2 + **3** = 5 (ist wahr)
2 + **4** = 5 (ist falsch)

Begriffe

– Eine Funktion, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist, nennt Frege einen *Begriff*. Begriffe sind demnach eine besondere Art von Funktionen.

– Der Ausdruck „2+( )=5“ bezeichnet den Begriff des *um 2 vermehrt 5 Ergebens*. Der einzige Gegenstand, der unter diesen Begriff fällt, ist die Zahl 3.

– Freges Theorie der Funktionen erlaubt es, nicht nur mathematische Begriffe, sondern auch Begriffe der natürlichen Sprache zu analysieren.

– „[D]ie sprachliche Form der Gleichungen ist ein Behauptungssatz.“ (Frege, *FB*, 16)

– Die mit den Behauptungssätzen „Caesar eroberte Gallien“ und „3 ergibt um 2 vermehrt 5“ ausgedrückten Gedanken können demnach in Funktion (Begriff) und Argument zerlegt werden.

Argument	Begriff	Wert
Caesar	( ) eroberte Gallien	wahr
Idefix	( ) eroberte Gallien	falsch
2	( ) eroberte Gallien	falsch
3	( ) eroberte Gallien	falsch

Caesar fällt unter den Begriff des *Gallien-erobert-Habens*. Andere Gegenstände wie etwa Idefix oder die 2 fallen nicht unter diesen Begriff.

Argument	Begriff	Wert
Caesar	( ) + 2 = 5	falsch
Idefix	( ) + 2 = 5	falsch
2	( ) + 2 = 5	falsch
3	( ) + 2 = 5	wahr

Die Zahl 3 fällt unter den Begriff des *um 2 vermehrten 5 Ergebens.* Andere Gegenstände, wie Cäsar, Idefix oder Zahl 2 tun dies nicht.

Wahrheitsfunktionen

- Mit der Erweiterung des Funktionsbegriffs können Funktionen das Wahre und das Falsche als Wert annehmen. Insofern das Wahre und das Falsche somit Ergebnisse einer Sättigung von etwas Ungesättigtem (der Ergänzung von etwas Unvollständigem) sind, betrachtet Frege sie als Gegenstände (d.h. als etwas Vollständiges oder Gesättigtes).
- Als Gegenstände können das Wahre und das Falsche auch als Argument einer Funktion auftreten.
- Funktionen, die für einen der beiden Wahrheitswerte als Argument wiederum einen Wahrheitswert ergeben, nennt Frege *Wahrheitsfunktionen*.
- Frege definiert den sog. *Waagerechten* als Zeichen für eine Wahrheitsfunktion: $——\, \Delta$

  Der Wert dieser Funktion ist das Wahre, wenn Δ das Wahre ist, und das Falsche, wenn Δ nicht das Wahre ist.

(1)	$——\, 4$	ist das Falsche, da die 4 nicht das Wahre ist
(2)	$——$ *Haus*	ist das Falsche, da ein Haus nicht das Wahre ist
(3)	$——\, 2+3=5$	ist das Wahre, da 2+3=5 das Wahre ist
(4)	$——\, \odot+1$	ist das Falsche, da $\odot$+1 nicht das Wahre ist

Verneinung, Allgemeinheit und Bedingtheit

Im Anschluss an die wahrheitsfunktionale Definition des Waagrechten können weitere Zeichen für logische Operatoren gebildet werden.

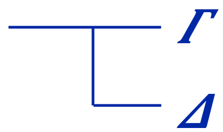
Verneinung (Negation)

Die beiden Waagrechten links und rechts vom Verneinungsstrich bezeichnen die bereits eingeführte Wahrheitsfunktion. Die Negation ist eine komplexe Wahrheitsfunktion, deren Wert für jedes Argument das Falsche ist, für welches der Wert von —— Δ das Wahre ist, und für alle anderen Argumente das Wahre.

Allgemeinheit

Der Wert dieser Funktion ist das Wahre, wenn der Wert der Funktion $\Phi(\xi)$ für jedes Argument ξ das Wahre ist, und sonst das Falsche.

Bedingtheit



Der Wert dieser Funktion ist dann das Falsche, wenn als Δ-Argument das Wahre und zugleich als Γ-Argument ein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; in allen anderen Fällen ist der Wert dieser Funktion das Wahre.

Der Urteilsstrich

Zusätzlich zum Waagerechten und den drei genannten Zeichen für logische Operatoren verwendet Frege den „Urteilsstrich" – einen kleinen senkrechten Strich, der links am Waagerechten angebracht wird – um anzuzeigen, dass ein Gedanke oder Inhalt als wahr beurteilt wird, bzw. behauptet wird, dass eine Funktion den Wert wahr annimmt.

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, \varDelta$$

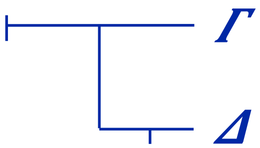
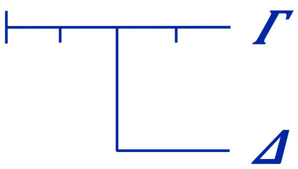
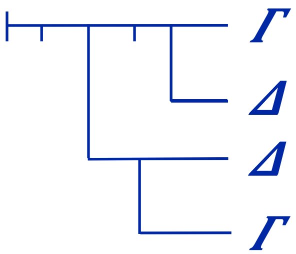
Mit der Unterscheidung zwischen dem Urteil und seinem Inhalt (bzw. dem Urteil und dem beurteilten Gedanken) geht der Verzicht auf die Unterscheidung zwischen Urteils*formen* einher.

In der Begriffsschrift sind alle Urteile affirmativ. Negation, Bedingung, Allgemeinheit und Partikularität sind nicht Eigenschaften des Urteils, sondern seines *Inhalts*.

Begriffsschrift	**moderne Notation**
$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, \varDelta$	$\varDelta$
$\vdash\!\!\!-\!\!\!\top\!\!\!-\, \varDelta$	$\neg \varDelta$
$\vdash\!\!\!-\!\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$	$\forall a \Phi a$
$\vdash\!\!\!-\!\!\!\begin{array}{l}\!-\!\!\!-\, \varGamma \\ \lfloor\!-\, \varDelta\end{array}$	$\varDelta \rightarrow \varGamma$

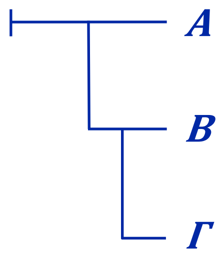
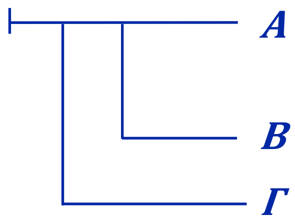
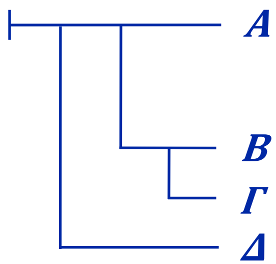
Begriffsschrift und moderne Notation

Γ, Δ sind Mitteilungszeichen für AL- und PL- bzw. begriffsschriftliche Formeln.

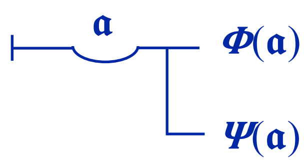
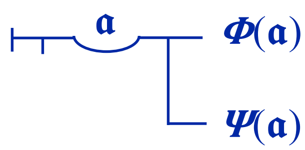
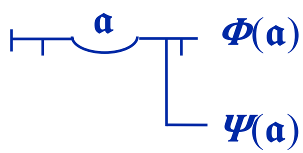
Begriffsschrift		Moderne Notation
	Es ist nicht der Fall, dass ***Δ*** nicht der Fall ist.	$\neg\neg\, \Delta$
	Wenn ***Δ*** nicht der Fall ist, dann ist ***Γ*** der Fall.	$\neg\Delta \rightarrow \Gamma$
	Es ist nicht der Fall, dass, wenn ***Δ*** der Fall ist, ***Γ*** nicht der Fall ist.	$\neg(\Delta\rightarrow\neg\Gamma)$
	Es ist nicht der Fall, dass, wenn es der Fall ist, dass, *wenn **Γ** der Fall ist, **Δ** der Fall ist*, es nicht der Fall ist, dass, *wenn **Δ** der Fall ist, **Γ** der Fall ist*.	$\neg((\Gamma\rightarrow\Delta) \rightarrow\neg(\Delta\rightarrow\Gamma))$ ist äquivalent zu $(\Gamma\rightarrow \Delta) \wedge (\Delta\rightarrow\Gamma)$ ist äquivalent zu $(\Gamma\leftrightarrow\Delta)$

Begriffsschrift und moderne Notation

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Delta}$ sind Mitteilungszeichen für AL- und PL- bzw. begriffsschriftliche Formeln.

$(\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}$	Das Konsequens $\mathbf{A}$ wird durch ein komplexes Antezedens $(\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{B})$ bedingt.	
$\mathbf{\Gamma} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$	Ein komplexes Konditional, dessen Antezedens $\mathbf{\Gamma}$ und dessen Konsequens $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ ist.	
$\mathbf{\Delta} \rightarrow ((\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A})$	Ein Konditional mit dem Antezedens $\mathbf{\Delta}$ und einem komplexen Konsequens, dessen Konsequens $\mathbf{A}$, und dessen Antezedens $\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{B}$ ist.	

Begriffsschrift und die prädikatenlogische Sprache PL

moderne Notation in PL		Begriffsschrift
$\forall x(Px \rightarrow Qx)$ $\neg\exists x(Px \wedge \neg Qx)$	Alle P sind Q.	
$\neg\forall x(Px \rightarrow Qx)$ $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$	Nicht alle P sind Q.	
$\neg\exists x(Px \wedge Qx)$ $\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$	Kein P ist Q.	
$\exists x(Px \wedge Qx)$ $\neg\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$	Einige P sind Q.	

FIN